

04-02 Nombres premiers entre eux**Définition**

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.

On dit que a et b sont **premiers entre eux** lorsque $\text{PGCD}(a ; b) = 1$.

Propriété

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.

Si d leur $\text{PGCD}(a ; b)$ alors les nombres $\frac{a}{d}$ et $\frac{b}{d}$ sont premiers entre eux.

Démonstration

On sait que, pour tout $\lambda \in \mathbb{N}^*$, on a $\text{PGCD}(\lambda a ; \lambda b) = \lambda \text{PGCD}(a ; b)$.

$$\begin{aligned} \text{Les nombres } \frac{a}{d} \text{ et } \frac{b}{d} \text{ sont premiers entre eux} &\Leftrightarrow \text{PGCD}\left(\frac{a}{d} ; \frac{b}{d}\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow d \text{ PGCD}\left(\frac{a}{d} ; \frac{b}{d}\right) = d \\ &\Leftrightarrow \text{PGCD}(a ; b) = d \end{aligned}$$

Propriété

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls.

S'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$ alors a et b sont premiers entre eux.

Démonstration

Soit $d = \text{PGCD}(a ; b)$.

d divise a et b

$$\Rightarrow d \text{ divise } au + bv$$

$$\Rightarrow d \text{ divise } 1$$

$$\Rightarrow d = 1$$

04-02 Applications du cours**Application 1**

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- a] Démontrer que les nombres $a = 5n + 1$ et $b = 9n + 2$ sont premiers entre eux.
- b] Démontrer que les nombres $a = (n + 2)^2$ et $b = (n + 3)(n + 1)$ sont premiers entre eux.

Application 2

Pour chacune des équations suivantes, déterminer un couple solution d'entiers $(x ; y)$.

a] $11x + 19y = 1$

b] $23x + 32y = 1$

Application 3

Les équations suivantes ont-elles des solutions dans $\mathbb{Z}^2$?

a] $\frac{1}{120} = \frac{x}{15} + \frac{y}{8}$

b] $\frac{1}{240} = \frac{x}{12} + \frac{y}{40}$

Application 4

Démontrer qu'il n'existe pas d'entier naturel n tel que $\frac{n-3}{12}$ et $\frac{n-2}{15}$ sont tous les deux entiers.

Application 5

Soit a un entier relatif non nul. On dit que l'entier relatif x est un **inverse** de a modulo n lorsque $ax \equiv 1 [n]$.

1. Démontrer que si a possède un inverse modulo n alors a et n sont premiers entre eux.
2. a] Déterminer, si c'est possible, un inverse de 4 modulo 6.
b] Déterminer, si c'est possible, un inverse de 5 modulo 7.
c] En déduire l'ensemble des nombres relatifs x tels que $5x \equiv 3 [7]$.